

Projection d'une relation vectorielle sur un axe

En mécanique, on a souvent besoin de projeter une relation vectorielle sur un axe. Cela signifie que l'on va s'intéresser aux composantes des vecteurs sur cet axe.

Situation : on étudie un ballon sonde qui s'élève dans l'atmosphère.

La résolution d'un exercice de mécanique commence toujours de la même manière, même si les étapes ne sont pas demandées explicitement.

- Système** : le ballon. On réduit l'étude du ballon à celle de son centre d'inertie G (cela permet de ne pas s'embêter avec le point d'application des forces dans un premier temps).
- Référentiel** : référentiel terrestre considéré galiléen
- Bilan des forces** exercées sur le système :
 - le poids, orienté vers le bas : $\vec{P} = m\vec{g}$
 - la poussée d'Archimède orientée vers le haut : $\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$, le signe « - » indique que la force est bien dirigée vers le haut, à l'opposé de $\vec{g}$.
- On applique la **relation** de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = m\vec{a}$$

Cette relation entre vecteurs n'est pas utilisable en l'état. Il faut d'abord écrire le détail de ce qu'elle représente. Deux vecteurs (ici $(\vec{P} + \vec{\Pi})$ et $m\vec{a}$) ne sont égaux que si leurs composantes sont égales :

$$\begin{cases} P_x + \Pi_x = ma_x \\ P_y + \Pi_y = ma_y \\ P_z + \Pi_z = ma_z \end{cases}$$

- Projeter la relation sur un axe signifie que l'on s'intéresse aux composantes des vecteurs selon cet axe. Ici, la projection sur (Oz) permet d'écrire :

$$P_z + \Pi_z = m a_z \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} P_z &= -m g \\ \Pi_z &= +\rho V g \end{aligned}$$

On obtient :

$$-mg + \rho V g = m a_z$$

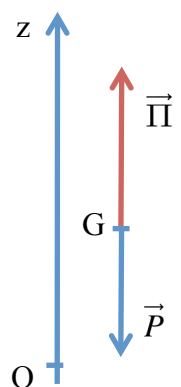
soit

$$a_z = -g + \frac{\rho V g}{m}$$

Cette grandeur peut être positive ou négative. On l'utilise ensuite différemment selon l'exercice.

Cette étape est importante, car c'est elle qui nous permettra d'appliquer la relation de la dynamique, qui n'est valable que dans un référentiel galiléen.

Schéma :



Si deux vecteurs sont égaux alors leurs normes sont égales. Cette relation implique également :

$$\|\vec{P} + \vec{\Pi}\| = \|m\vec{a}\|$$

Attention, on ne peut pas en déduire que $\|\vec{P}\| + \|\vec{\Pi}\| = m\|\vec{a}\|$

Le signe moins provient du fait que la projection est négative puisqu'elle est dirigée à l'opposé de l'axe (Oz), et que les grandeurs m et g sont positives.

• Attention, P_z et Π_z ne sont pas les normes mais les composantes des vecteurs selon l'axe (Oz).

• Attention, si on écrit :

$$P + \Pi = m a \quad \text{ou} \quad -P + \Pi = m a$$

on ne sait pas si on manipule des composantes de vecteurs ou des normes et cela implique des confusions et des erreurs (voir première bulle). Pour quelques précisions référez-vous au document « la notation des vecteurs de physique ».