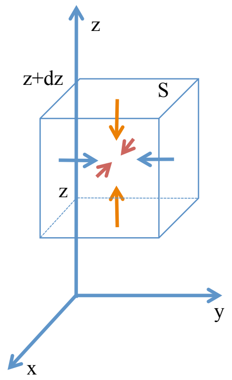
La relation de la statique des fluides

On étudie un petit morceau de fluide en équilibre (qui ne bouge pas). Pour des raisons de cohérence avec le système d'axe choisi, on décide de prendre un élément de fluide en forme de cube. Réalisons son étude mécanique :



1. <u>Définition du système étudié</u> : dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on étudie l'équilibre de ce cube.

2. <u>Bilan des forces qui s'appliquent sur ce cube</u> :
- Les forces de pression :
  - Selon les axes (Ox) et (Oy), les forces qui s'appliquent que les faces du cube se compensent deux à deux (attention, elles ne sont pas nulles pour autant !)
  - Selon l'axe (Oz) :
    - La force qui s'applique sur la face du haut, dirigée vers le bas s'écrit : $\overrightarrow{F_{haut}} = -p(z+dz)S\overrightarrow{e_z}$, le signe « - » indique que la force est orientée vers le bas.
    - La force qui s'applique sur la face du bas, dirigée vers le haut s'écrit : $\overrightarrow{F_{bas}} = +p(z)S\overrightarrow{e_z}$
- Son poids $\overrightarrow{Poids} = m\vec{g}$

Si on note le poids avec la lettre P, on risque de confondre avec la pression

3. On écrit le principe d'inertie : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

On projette cette relation sur l'axe (Oz) : (pour plus de détails voir le document « projection d'une relation vectorielle sur un axe »)

$$F_{haut\,z} + F_{bas\,z} + Poids_z = 0$$

$$-p(z+dz)S + p(z)S - mg = 0$$

On obtient : $p(z+dz) - p(z) = -\dfrac{mg}{S}$

D'après la définition de la dérivée de la fonction p(z) :

$$\frac{dp(z)}{dz} = \frac{p(z+dz)-p(z)}{dz}$$

soit

$$p(z+dz) - p(z) = \frac{dp(z)}{dz}dz$$

- On écrit alors notre relation comme : $\dfrac{dp(z)}{dz}dz = -\dfrac{mg}{S}$
- Par ailleurs, la masse du cube s'écrit : $m = \rho V = \rho S dz$

On obtient : $\dfrac{dp(z)}{dz}dz = -\dfrac{\rho S g dz}{S}$

soit $\dfrac{dp(z)}{dz} = -\rho g$ ou $dp(z) = -\rho g\, dz$

C'est la relation microscopique de la statique des fluides

4. On peut maintenant exprimer cette relation au niveau macroscopique, en « empilant les cubes » depuis une altitude z_{bas} jusqu'à l'altitude z_{haut}, altitudes qui ne sont pas infiniment proches. Comme g et ρ sont des constantes, on peut écrire :

$$\int_{p_{bas}}^{p_{haut}} dp(z) = -\rho g \int_{z_{bas}}^{z_{haut}} dz$$

Ce qui donne : $p_{haut} - p_{bas} = -\rho g(z_{haut} - z_{bas})$, et que l'on retient sous la forme :

$$p_{bas} = p_{heut} + \rho g h$$

où h est la différence d'altitude (h >0).

C'est la relation macroscopique de la statique des fluides

N. Reverdy